جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

راهنمای تصحیح درس : دیفرانسیل	نام واحد آموزشی : دبیرستان هاتف	ساعت امتحان: ۸ صبح
نوبت امتحانی : نیمسال اول	نام دبیر : آقای هاشمی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۱۰/۷
رشته : رشته های : ریاضی و فیزیک	پایه : چهارم	تعداد برگ راهنمای تصحیح : یک برگ
سال تحصیلی : ۹۳-۱۳۹۲		

۱ ۱- چون a و b مثبت هستند، پس a^{-1} و b^{-1} نیز مثبت هستند. اگر $b^{-1} \not< a^{-1}$ (فرض خلف)، آن‌گاه $b^{-1} \ge a^{-1}$ و درنتیجه خواهیم داشت:

$(ab)b^{-1} \ge a^{-1}(ab)$ زیرا $ab > 0$ است

$a(bb^{-1}) \ge (a^{-1}a)b$ زیرا عمل ضرب، دارای خاصیت شرکت‌پذیری است

$a.1 \ge b.1$ ویژگی عضو وارون نسبت به عمل ضرب

$a \ge b$ ویژگی عضو بی‌اثر عمل ضرب

و این تناقض است، پس فرض خلف باطل است و درنتیجه $b^{-1} < a^{-1}$.

۱ ۲- از تعیین علامت نابرابری $x^4 + x^2 - 2 < 0$ نتیجه می‌شود $-2 < x^2 < 1$ و چون به‌ازای هر عدد حقیقی x، همواره $x^2 \ge 0$، پس $x^2 < 1$ یا $-1 < x < 1$ مرکز این همسایگی، نقطه‌ی صفر و شعاعش ۱ است.

۲ ۳- می‌دانیم $\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n-1}$، درنتیجه دنباله به‌صورت $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ است و داریم $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| \le 1$، پس دنباله کراندار است. واضح است که جملات با شماره‌ی فرد، مثبت و جملات با شماره‌ی زوج، منفی هستند، در نتیجه، دنباله، نوسانی و بنابراین غیر یکنواست. با افزایش n، مخرج دنباله بی‌کران افزایش می‌یابد درصورتی که صورت آن ± 1 است، پس دنباله به صفر همگراست.

۱/۵ ۴-

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ \ni \ n \ge M \Rightarrow \left|\frac{4n+3}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2n+1}\right| < \varepsilon \to \frac{1}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow 2n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

پس کافی است $M \ge \left[\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1$ باشد.

۰/۵ ۵- اگر $A \subset \mathbb{R}$، چنان‌چه عضوی حقیقی مانند r وجود داشته باشد طوری که به‌ازای هر عضو a از مجموعه‌ی A داشته باشیم $a \le r$، آن‌گاه می‌گوییم دنباله از بالا کران‌دار است.

۱/۵ ۶-

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n+2}{5n-8}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{10}{5n-8}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{10}{5n-8}\right)^{-1} \times \left[\left(1+\frac{10}{5n-8}\right)^{n}\right]^{2} = \lim_{n\to+\infty} 1 \times \left[\left(1+\frac{10}{5n-8}\right)^{n}\right]^{2}$$

اگر فرض کنیم $k = \frac{5n-8}{10}$، آن‌گاه $n = 2k + \frac{8}{5}$ و چنان‌چه $n \to +\infty$، آن‌گاه $k \to +\infty$، پس داریم:

$$= \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{10}{5n-8}\right)^{n}\right]^{2} = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k+\frac{8}{5}}\right]^{2} = \left[\left(\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{2} \times \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{8}{5}}\right]^{2} = \left[e^{2} \times 1\right]^{2} = e^{4}$$

۱ ۷- اگر a، عددی گویا و n، عددی طبیعی باشد، آن‌گاه تمام جملات دنباله‌ی $\{a_n\} = \{a + \frac{1}{n}\}$ گویا و تمام جمله‌های دنباله‌ی $\{b_n\} = \{a + \frac{\sqrt{2}}{n}\}$ ناگویا هستند. اکنون داریم:

$$\begin{cases} f(a_n) = f(a+\frac{1}{n}) = 3a + \frac{3}{n} + 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(3a + \frac{3}{n} + 1) = 3a+1 \\ f(b_n) = f(a+\frac{\sqrt{2}}{n}) = 3a + \frac{3\sqrt{2}}{n} - 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3a + \frac{3\sqrt{2}}{n} - 1 = 3a-1 \end{cases}$$

چون $3a+1 \ne 3a-1$، پس تابع f در هر نقطه با طول گویای a دارای حد نیست.

۴ ۸- الف) اگر قرار دهیم $x = u+1$، چنان‌چه $x \to 1$، آن‌گاه $u \to 0$ و داریم:

$$\lim_{x\to1}(1+x-2x^2)\cot\pi x = \lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1+2x)}{\tan\pi x} = \lim_{u\to0}\frac{-u(3+2u)}{\tan\pi(1+u)} = -\lim_{u\to0}\frac{u(3+2u)}{\tan\pi u}$$

$$= -\lim_{u\to0}\frac{u}{\tan\pi u}(3+2u) = -\frac{1}{\pi}\times(3+0) = -\frac{3}{\pi}$$

ب)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5})(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{5})}^{=x^2+4x-5=(x-1)(x+5)}}{(x-1)(x+4)(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{5})}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{(x+4)(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{5})}=\frac{6}{5(\sqrt{5}+\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{5}}{25}$$

پ)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left|x+\tfrac{1}{2}\right|+(x+\tfrac{3}{3})\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\tfrac{1}{2}+x+1\right)=\tfrac{1}{2}$$

ت)
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2\cos(\pi\lfloor x\rfloor)+1}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2\cos\pi\lfloor 3^+\rfloor+1}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2\cos 3\pi+1}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2\times(-1)}{x-3}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

۹- شرط لازم و کافی برای این‌که تابعی در یک نقطه، پیوسته باشد آن است که حد تابع در آن نقطه، با مقدار تابع در آن نقطه، برابر باشد. واضح است که $a=f(-2)$ و نیز داریم ۴

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(b+\lfloor x^2\rfloor\right)=b+3$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x-2)(x+2)}{|x+2|}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^-}-(x-2)=4$$

برای پیوسته بودن، باید داشته باشیم:
$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)\Rightarrow b+3=4=a\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}$$

۱۰- چون $\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=+\infty$ ، پس خط $x=3$ مجانب قائم تابع است. چون $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ ، پس تابع دارای مجانب افقی نمی‌باشد. از طرفی از آن جا که $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-1)}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=2$ و درضمن: ۲

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}2x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}-1\right)-\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x\left(\frac{x+1}{x-3}-1\right)}{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}+1}-1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{8x}{x-3}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}+1}-1=\frac{8}{1+1}-1=3$$

پس خط $y=2x+3$ مجانب مایل هر دو شاخه‌ی راست و چپ تابع است.

۱۱ - تابع $f(x)=x^5+(2a+1)x+a-2$ در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است و اگر $f(-1)f(1)<0$ ، معادله در این بازه دست‌کم یک ریشه دارد. ۱

$$f(-1)f(1)<0\Rightarrow[(-1)^5+(2a+1)(-1)+a-2][1^5+(2a+1)\times 1+a-2]<0\Rightarrow(-4-a)(3a)<0\Rightarrow a<-4 \text{ یا } a>0$$

۱۲- با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+\sin 3(x+h)-2x-\sin 3x}{h}$$ ۱/۵

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2h}{h}+\frac{\sin 3(x+h)-\sin 3x}{h}\right)=2+\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{3h}{2}\cos(3x+\frac{3h}{2})}{h}=2+2\times\frac{3}{2}\cos 3x=2+3\cos 3x$$

۱۳- شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در نقطه‌ی $x=2$، پیوستگی تابع در این نقطه است. چون $\lim_{x\to 2^-}bx+\lfloor 2x\rfloor=2b+3$ و $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}2ax^2+x=8a+2$ درنتیجه باید داشته باشیم (۱) $2b+3=8a+2$. از طرفی باید مشتق چپ و راست تابع در این نقطه برابر باشند و داریم: $f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow 8a+1=b$ (۲) از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم $a=\frac{-3}{8}$ و $b=-2$. ۱

۲۰